

Semimodulární, modulární a distributivní svazy

Jiří Hýsek

17. ledna 2008

Obsah

1 Úvod	2
2 Svaz jako částečně uspořádaná množina	2
2.1 Částečně uspořádaná množina	2
2.2 Hasseův diagram	2
2.3 Svaz	3
3 Svaz jako algebraická struktura	4
3.1 Spojitost obou definic svazu	4
4 Podsvazy a morfismy svazů	4
5 Klasifikace svazů	5
5.1 Komplementární svazy	5
5.2 Modulární svazy	6
5.3 Semimodulární svazy	7
5.4 Distributivní svazy	7

1 Úvod

Svazem v této práci se budeme zabývat svazy jako matematickými strukturami. Na svaz se dá dívat z více pohledů. Můžeme ho definovat jako algebraickou strukturu nebo také částečně uspořádanou množinu, která splňuje určité vlastnosti. Podíváme se na svazy oběma směry a ukážeme si spojitost obou definic. Dále si řekneme, co jsou svazy semimodulární, modulární a distributivní a definujeme vlastnosti, ve kterých se jednotlivé druhy svazů odlišují.

2 Svaz jako částečně uspořádaná množina

2.1 Částečně uspořádaná množina

*Částečně uspořádaná množina*¹ formalizuje uspořádání (určení pořadí některých prvků) na množině. Sestává se z množiny a binární relace popisující uspořádání jednotlivých dvojic prvků (ne nutně všech). Definujme si ji formálně.

Částečné uspořádání je binární relace \leq na množině P , která je

- reflexivní, tedy platí, že pro každé $a, b, c \in P$ platí $a \leq a$,
- tranzitivní, tzn. $a \leq b$ a zároveň $b \leq c$, pak platí $a \leq c$,
- antisymetrická, tedy pokud $a \leq b$ a $b \leq a$, pak platí $a = b$.

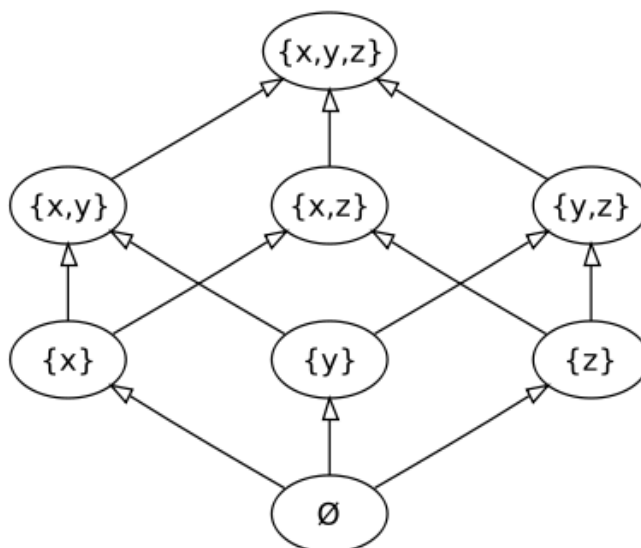
Částečně uspořádanou množinou uvažujeme dvojici (P, \leq) , tedy množinu a částečné uspořádání na ní definované.

Jako příklad částečně uspořádaných množin můžeme uvést množinu podmnožin dané množiny s relací inkluze, množinu přirozených čísel s relací dělitelnosti nebo také množinu reálných čísel s relací *menší nebo rovno* \leq .

2.2 Hasseův diagram

Hasseův diagram, pojmenovaný po německém matematikovi Helmutu Hasseovi, je využíván pro znázornění relace uspořádání na množině. Jde o orientovaný graf, kde vrcholy odpovídají jednotlivým prvkům částečně uspořádané množiny a hrany znázorňují jednotlivé prvky relace. Je-li např. na množině P definovaná relace \leq , jejíž prvkem je dvojice $(a, b) \in \leq$, pak hasseův diagram bude obsahovat vrcholy a, b a hranu vedoucí z vrcholu a do vrcholu b . Na obrázku 1 vidíme příklad Hasseova diagramu znázorňujícího potenční množinu 2^X množiny $X = \{x, y, z\}$ uspořádanou relací inkluze.

¹Anglicky "partially ordered set", často uváděná pod zkratkou "poset".



Obr. 1: Hasseův diagram částečně uspořádané množiny $(2^{\{x,y,z\}}, \subseteq)$.

Často kreslíme Hasseovy diagramy způsobem, kde menší prvek vzhledem k uspořádání a je zakreslen níže než větší prvek b (prvek a je pokryt prvkem b). Proto šipky u hran často vynecháváme, jejich směr je implicitně určen způsobem umisťování vrcholů (předpokládá se, že šipky směřují nahoru).

2.3 Svaz

Předpokládejme, že v uspořádané množině (L, \leq) existují prvky x, y takové, že $x \leq y$. Potom prvku x říkáme *dolní závora* (angl. *lower bound*) prvku y a analogicky prvku y *horní závora* (*upper bound*) prvku x . Dále si definujeme pojmy *supremum* a *infimum*.

Supremum množiny X je nejmenší ze společných horních závor všech prvků množiny X . Např. uspořádaná množina znázorněná na obr. 1 má supremum a to prvek $\{x, y, z\}$. Pokud bychom uvažovali např. množinu $\{\{x\}, \{x, z\}\}$ při stejném uspořádání, jaké je znázorněno na obr. 1, pak by její supremum byl prvek $\{x, z\}$. A například množina $\{\{x\}, \{y\}\}$ supremum nemá, její prvky nejsou porovnatelné a tudíž nemají žádnou společnou horní závoru.

Analogicky *infimum* množiny X je největší ze společných dolních závor všech prvků množiny X . Např. infimum potenční množiny $2^{\{x,y,z\}}$ z obr. 1 je prázdná množina.

Nyní známe všechny pojmy k tomu, abychom si mohli definovat svaz jako částečně uspořádanou množinu.

Částečně uspořádaná množina (L, \leq) je *svazem* (angl. *lattice*), pokud v ní existuje *supremum* i *infimum*. Často se pro zjednodušení zápisu hovoří o svazu L (stejný název jako název nosné množiny) namísto správného (L, \leq) .

3 Svaz jako algebraická struktura

Jak jsme se již řekli na začátku, svaz je možné definovat jako algebraickou strukturu, přesněji jako množinu se dvěma binárními operacemi. Jde o operace \wedge průsek (angl. *meet*) a operaci \vee spojení (*join*).

Předpokládejme, že struktura $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je *svazem*, pak pro všechny prvky $a, b, c \in L$ platí

- komutativita – $a \vee b = b \vee a$ a také $a \wedge b = b \wedge a$,
- asociativita – $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$, $(a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$,
- absorpce – $a \vee (b \wedge a) = a$, $a \wedge (b \vee a) = a$.

Z těchto vlastností dále vyplývá

- idempotence – $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$.

3.1 Spojitost obou definic svazu

Svaz definovaný algebraickou strukturou lze snadno vyjádřit uspořádanou množinou. Relaci částečného uspořádání \leq vyjádříme pomocí operací \wedge a \vee .

Mějme svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$. Částečné uspořádání \leq na množině L , můžeme definovat takto:

- $x \leq_{\mathcal{L}} y$ tehdy a jen tehdy, pokud $x \vee y = y$ nebo ekvivalentně
- $x \leq_{\mathcal{L}} y$ tehdy a jen tehdy, pokud $x \wedge y = x$.

Můžeme si to ukázat opět na příkladu.

Příklad 3.1.1: Mějme svaz $\mathcal{L}_1 = (L, \leq)$, kde $L = 2^{\{x,y,z\}}$ a operace částečného uspořádání \leq odpovídá množinové inkluzi \subseteq . Dále svaz $\mathcal{L}_2 = (L, \wedge, \vee)$, kde operace průseku a spojení odpovídají množinovému průniku \cap a sjednocení \cup . Potom je \mathcal{L}_2 ekvivalentní s \mathcal{L}_1 . Dá se ukázat, že vezmeme-li dva libovolné prvky $a, b \in L$, pak platí, že jsou-li v relaci $a \subseteq b$, pak také platí, že $a \vee b = b$ a $a \wedge b = a$.

Např. zvolme $a = \{x\}$, $b = \{x, z\}$. Prvky a, b jsou v relaci \leq (protože a je podmnožinou b) a zároveň také platí, že $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$ a $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$.

4 Podsvazy a morfismy svazů

V dalších kapitolách budeme používat termíny jako *podsvaz* či *izomorfismus*. Proto si je nejdříve nadefinujeme.

Def. Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz a L' neprázdná podmnožina jeho nosné množiny L . Pak L' nazýváme *podsvazem* svazu \mathcal{L} , platí-li, že množina L' je uzavřena vzhledem ke svazovým operacím \wedge a \vee , tedy pro každé $a, b \in L'$ platí $a \wedge b \in L'$ a $a \vee b \in L'$.

Příklady. Každá jednoprvková podmnožina svazu je jeho podsvazem (díky idempotenci je takováto množina uzavřena vůči oboum operacím), každý svaz je svým podsvazem (protože každá množina je sama sobě podmnožinou).

Def. Mějme svazy G a H a zobrazení $f : G \rightarrow H$. Pak f je svazový *homomorfismus*, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí

$$f(a \wedge_G b) = f(a) \wedge_H f(b)$$

$$f(a \vee_G b) = f(a) \vee_H f(b)$$

Je-li f bijektivní homomorfismus, pak říkáme, že f je *izomorfismus*.

Příklad 4.1: Mějme $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ s uspořádáním dělitelnosti, Y s uspořádáním množinové inkluze \subseteq , $Y = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. Pak svazy X a Y jsou izomorfní, stačí definovat

$$f(1) = \phi, f(2) = \{2\}, f(3) = \{3\}, f(4) = \{1, 2\}, f(6) = \{2, 3\}, f(12) = \{1, 2, 3\}.$$

5 Klasifikace svazů

5.1 Komplementární svazy

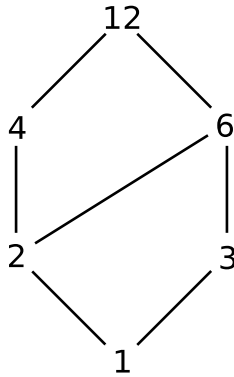
Svazu L říkáme *ohraničený*, pokud v něm existuje nejmenší prvek $0 \in L$, největší prvek $1 \in L$.

Mějme svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$. Jestliže je \mathcal{L} ohraničená svaz a pro každé $x \in L$ existuje $\bar{x} \in L$ s vlastností

$$x \wedge \bar{x} = 0, x \vee \bar{x} = 1,$$

pak svaz \mathcal{L} nazýváme *komplementární*. Prvek \bar{x} se nazývá *doplňkem* (*komplementem*) prvku x .

Příklad 5.1.1. Uvažujme množinu $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ s uspořádáním dělitelnosti. Hasseův diagram znázorňující svaz X je zobrazen na obrázku 2. Prvek 2 nemá komplement: jediným kandidátem je prvek 3, neboť chceme, aby platilo $2 \wedge \bar{2} = 1$, avšak $2 \vee \bar{2} = 6$, zatímco požadujeme $2 \vee \bar{2} = 12$.



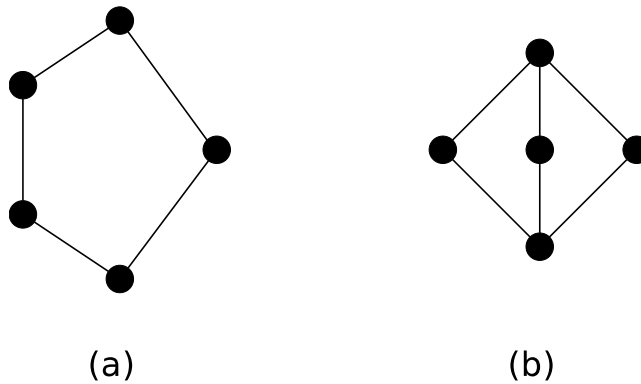
Obr. 2: Svaz, který není komplementární.

5.2 Modulární svazy

Svaz L je *modulární*, jestliže splňuje zákon modularity. Tedy pro všechny $x, y, z \in L$ takové, že $x \leq z$ platí:

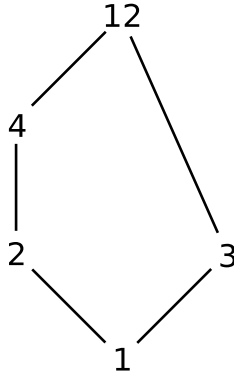
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

Na obrázku 3 a) vidíme tzv. pentagonální svaz, označujeme jej N_5 . Jde o nejmenší svaz, který není modulární. Existuje tzv. *Dedekindovo kritérium* modularity svazu, které říká, že svaz je modulární tehdy a jen tehdy, neobsahuje-li žádný podsvaz, který je izomorfní s pentagonálním svazem.



Obr. 3: (a) Pentagonální svaz N_5 , (b) diamantový svaz M_3 .

Příklad 5.2.1: Svaz, který není modulární. Mějme množinu $X = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ s uspořádáním dělitelností., jak je zřejmé z Hasseova diagramu na obrázku 4.



Obr. 4: Hasseův diagram svazu z příkladu 5.4.1

Zřejmě $2 \leq 4$ a přitom

$$2 \vee (3 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2, \quad (2 \vee 3) \wedge 4 = 12 \wedge 4 = 4.$$

Tedy svaz X není modulární. Vidíme také, že je izomorfní s pentagonálním svazem z obrázku 3 a), tedy podle Dedekindova kritéria být modulární nesmí.

5.3 Semimodulární svazy

Svaz L je *semimodulární*, jestliže pro každé $a, b \in L$ platí

$$a \wedge b \leq a \Rightarrow b \leq a \vee b.$$

Svaz L je *spodně modulární* (lower modular), jestliže pro každé $a, b \in L$ platí

$$b \leq a \vee b \Rightarrow a \wedge b \leq a.$$

Konečný svaz je *modulární* tehdy a jen tehdy, pokud je semimodulární a zároveň spodně semimodulární. Tedy platí-li obě výše zmíněné implikace současně:

$$a \wedge b \leq b \Leftrightarrow b \leq a \vee b$$

5.4 Distributivní svazy

Obě operace distributivního svazu $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ se vynačují tím, že splňují zákony distributivity. Pro každé $a, b, c \in L$ platí:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Příklady distributivních svazů. Distributivním svazem je například každá booleova algebra, či úplně uspořádaná množina s operací minimálního prvku jako průsek a maximálního prvku jako spojení.

Věta 5.4.1. Každý distributivní svaz je nutně také modulární.

Důkaz. Mějme distributivní svaz (L, \vee, \wedge) . Necht' $x, y, z \in L$ a platí, že $x \leq z$. Pak $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (distributivní zákon) a protože platí $x \leq z$, pak $x \vee z = z$. Platí tedy

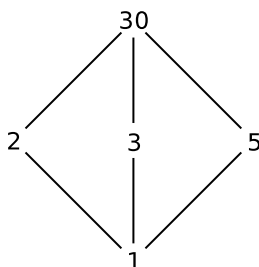
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z,$$

což je podmínka modularity.

Tvrzení, že modulární svaz je distributivní však platí, jen pokud daný modulární svaz splňuje určité podmínky. Nejprve se podívejme na obrázek 3b). Jde o nejmenší svaz, který není distributivní. Říkáme mu *diamantový svaz* a značíme jej M_3 . Podle tzv. *Birkhoffova* kritéria platí, že modulární svaz je distributivní tehdy a pouze tehdy, pokud neobsahuje žádný podsvaz isomorfní s diamantovým podsvazem.

Věta 5.4.2: Je-li L distributivní svaz, pak každý prvek $x \in L$ má *nejvýše* jeden komplement.

Příklad 5.4.1: Modulární svaz, který není distributivní. Následující svaz je diamantovým svazem. Položme $L = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ a zvolme uspořádání dělitelností, jak ukazuje Hasseův diagram.



Pak svaz L je komplementární s nejmenším prvkem 1, největším prvkem 30. Prvek 2 má dva komplementy – 3 a 5.

$$2 \wedge 3 = 2 \wedge 5 = 1, 2 \vee 3 = 2 \vee 5 = 30.$$

Má-li prvek 2 komplementy, pak se podle věty 5.4.2 nejedná o distributivní svaz. Snadno ověříme, zda platí distributivní zákon $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$:

$$2 \vee (3 \wedge 5) = 2 \vee 1 = 2$$

$$(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 30 \wedge 30 = 30$$

Vidíme tedy, že distributivní zákon neplatí. Ukažme si ještě, že X je skutečně modulární. Pro $x = z$ je podmínka modularity splněna triviálně. Je-li pro $x, z \in L$ $x < z$, pak buď x se musí rovnat 1 nebo z se musí rovnat 30 (jiné možnosti porovnání v tomto svazu nejsou). Je-li $x = 1$, pak platí

$$x \vee (y \wedge z) = 1 \vee (y \wedge z) = y \wedge z = (1 \vee y) \wedge z = (x \vee y) \wedge z.$$

Je-li $z = 30$, pak

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee (y \wedge 30) = x \vee y = (x \vee y) \wedge 30 = (x \vee y) \wedge z.$$

Podmínka modularity je tedy splněna.

Reference

- [1] Kučera, R.: Základy teorie svazů, 2003. Dokument je dostupný na URL <http://www.math.muni.cz/~kucera/texty/Svazy2003.pdf>.
- [2] Cameron, P.: Posety a svazy. Dokument je dostupný na URL <http://designtheory.org/library/encyc/topics/posets.pdf>.
- [3] Svazy (encyklopedické heslo z Wikipedie). Dokument je dostupný na URL [http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_\(order\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_(order)).
- [4] Semimodular lattice (heslo z PlanetMath.org). Dokument je dostupný na URL <http://planetmath.org/encyclopedia/LowerSemimodularLattice.html>.
- [5] Kovár, M.: Diskrétní matematika, 2003.